2) Montrer que le centre de gravité I du triangle BDE est le point d'intersection de (AG) et du plan (BDE).

Exercice N°3

1) a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$

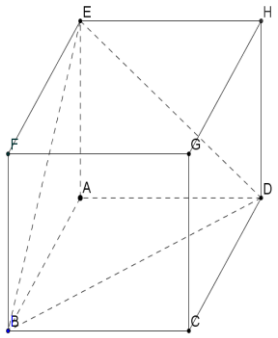
b) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right).\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD}=0$

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right).\overrightarrow{BE}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right).\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BE}=0$

.

D'après les résultats précédents $(AG)\perp(BD)$ *et* $(AG)\perp(BE)$ donc (AG) est perpendiculaire au plan (BDE).



2) BDE est un triangle équilatéral donc il suffit de montrer que I est le centre du cercle circonscrit au triangle BDE. AE=AB=AD (ABCDEFGH est un cube). GE=GB=GD (ABCDEFGH est un cube) donc (AG) est l'axe du cercle circonscrit au triangle BDE et comme $\{I\}=(AG)\cap(BED)$ donc I est le centre du cercle circonscrit au triangle BED et par suite I est le centre de gravité du triangle BED.

Exercice N°4 Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace E muni d'un repère orthonormé directe $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1) Montrer que $\forall M\in E$ le vecteur $\vec{N}=\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}$ est un vecteur normal au plan ABC et que $\vec{N}$ est indépendant de M.

2) On suppose que A(1,2,0) ,B(2,4,5) et C(2,3,-1).

a) Donner les coordonnés du point Ω tels que $\overrightarrow{A\Omega}=\vec{N}$.

b) Donner une équation cartésienne de la sphère S de centre Ω et tangente à (ABC).

c) Déterminer une équation cartésienne du plan Q=(ABΩ) en déduire la distance d entre C et le plan Q.

Exercice N°4

1) $\vec{N}=\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MA}\wedge\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}=$

$\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\right)\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MB}\wedge\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{CB}$ est un vecteur normal du plan (ABC).

2) a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-7\\6\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{A\Omega}=\vec{N}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=-7\\y-2=6\\z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6\\y=8\\z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\Omega(-6,8,-1)$.

b) S tangente à (ABC):-7x+6y-z+d=0, $A\in(ABC)\Rightarrow$-7+12+d=0 donc d=-5 d'où (ABC) :-7x+6y-z-5=0. S de rayon $r=d\left(\Omega,(ABC)\right)=\dfrac{\left|-7(-6)+6(8)+1-5\right|}{\sqrt{7^2+6^2+1}}=\sqrt{86}$ donc S :$(x+6)^2+(y-8)^2+(z+1)^2=86$.

Exercice N°5

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ d'un repère orthonormé directe de E et $\vec{u}$ le vecteur défini par $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ .f l'application de E dans E qui à M(x,y,z) on associe M'(x',y',z') tel que $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}-\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}$.

1) Déterminer $\mathcal{D}$ l'ensemble des points invariants par f.

2) a) Montrer que $\forall M\notin\mathcal{D}$ on a $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal du plan P=(M, $\mathcal{D}$).

b) Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ avec $M\notin\mathcal{D}$ calculer en fonction de x, y et z l'aire du triangle OMM' et le volume du tétraèdre OMM'H.

Exercice N°5 $f(M)=M'$; $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}-\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}$ *avec* $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

1) $f(M)=M\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}-\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}=\vec{0}\Leftrightarrow$ M est un point de la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2) a) $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}-\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{OM}-\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}$ donc $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal du plan P(M, $\mathcal{D}$).

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...